Leçon 201 : Etude de suites définies par différents types de ...

Développement : 25 Théorème de point fixe (compact)

I. Suites récurrentes d'ordre 1 :

E : ensemble non vide.

- Def 1 : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite récurrente d'ordre 1 si elle est définie par :
$$\begin{cases} u_0 \in E \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
où f application de E dans E.

- Ex : • Suites arithmétiques : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_{n+1} = u_n + a$
  • Suite géométrique : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_{n+1} = q.u_n$
  • Suites arithmético-géométriques : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_{n+1} = a u_n + b$

Ici on considère I intervalle réel et f application définie sur I à valeurs dans I.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

- Prop 2 : 1) Si f est croissante sur I, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
  2) Si f est décroissante sur I, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens de variation opposé.

- Prop 3 : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel $\ell \in I$ et si f continue en ℓ, alors il est point fixe pour f : $f(\ell) = \ell$

- Prop 4 : Point fixe attractif
Soit ℓ un point fixe de f tq $\ell \in \mathring{I}$. Si f dérivable en ℓ et $|f'(\ell)| < 1$ on dit que ℓ est un point fixe attractif. Il existe alors un réel $\alpha > 0$ tel que :
Toute suite de la forme :
$$\begin{cases} u_0 \in]\ell-\alpha ; \ell+\alpha[\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
est définie et converge vers ℓ.

- Prop 5 : Point fixe répulsif :
Soit ℓ point fixe de f tq $\ell \in \mathring{I}$. Si f est dérivable en ℓ et $|f'(\ell)| > 1$ on dit que ℓ est un point fixe répulsif. Si une suite de la forme
$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
est convergente vers ce point fixe ℓ, alors elle est stationnaire, et si f est de plus injective, alors elle est constante.

II. Théorème du point fixe :

- Théo 6 : Espace métrique complet
Soit (E, d) espace métrique complet et $f : E \to E$ application contractante

...es de récurrence - Applications.
...act)

... :

... $\in \mathring{I}$

... 1

... n

... e

... > 1

... ipsif

... l,

... ré

... et

... let

... tde

$(\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) \leq k\,d(x,y)), k \in [0;1[)$
Alors f admet un unique point fixe et toute suite de la forme
$$\begin{cases} u_0 \in E \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
est convergente vers ce point fixe.

_Théo 7: Espace métrique compact
Soit $(E;d)$ espace métrique compact et $f: E \to E$ application tq
$\forall (x,y) \in E^2, x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x;y)$
Alors f admet un unique point fixe et toute suite de la forme
$$\begin{cases} u_0 \in E \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
est convergente vers ce point fixe.

III. Suites récurrentes du second ordre: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

_Déf 8: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite récurrente linéaire du second ordre si elle est définie par:
$$\begin{cases} u_0, u_1 \in E \\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
où a et $b \in \mathbb{K}$

_Exemple: suite de Fibonacci

_Prop 9: L'ensemble des suites récurrentes du 2° ordre à coefficients constants est un $\mathbb{K}$-e.v. de base $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}})$ tq $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_1 = 1 \end{cases}$

_Déf 10: On appelle équation caractéristique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'équation:
$$(E): x^2 - ax - b = 0$$

_Théo 11: ...
a) si (E) admet 2 solutions distinctes dans $\mathbb{K}$ r_1 et r_2 alors $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tq. $u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
b) si (E) admet 1 seule solution $r \in \mathbb{K}$, alors $\exists \lambda_1$ et $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ tq:
$u_n = r^n(\lambda_1 + \lambda_2 n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

*Livres: Dantzer & 86 leçons et Tts Les maths MPSI pour la partie III.

*Prérequis: suites, limites, espace métrique complet, compact, e.v, base, Cauchy, suite extraite

Comp

* Compléments leçon 201 : Etude de suites définies par différents types de récurrence. Application

Points fixes attractifs

Proposition 10.6 *Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I et l un point fixe de f appartenant à $\mathring{I}$. Si f est dérivable en l avec $|f'(l)| < 1$, on dit que l est un point fixe attractif. Il existe alors un réel α strictement positif tel que :*

Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in]l-\alpha, l+\alpha[, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

est définie et converge vers l.

(Dantzer)

Preuve. On considère une application f définie sur un intervalle I, $l \in \mathring{I}$ un point fixe attractif de f, c'est-à-dire $f(l) = l$ et $|f'(l)| < 1$. On a

$$\lim_{t\to l} \left| \frac{f(t)-l}{t-l} \right| = |f'(l)|.$$

Soit r un réel appartenant à l'intervalle $]|f'(l)|, 1[$. Il existe un réel strictement positif α tel que

$$]l-\alpha, l+\alpha[\subset I,$$

et

$$\forall t \in]l-\alpha, l+\alpha[\setminus\{l\}, \quad \left| \frac{f(t)-l}{t-l} \right| \leq r.$$

L'intervalle $]l-\alpha, l+\alpha[$ est stable par l'application f car

$$\forall t \in]l-\alpha, l+\alpha[, \quad 0 \leq |f(t)-l| \leq r|t-l| < r\alpha < \alpha.$$

Toute suite de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in]l-\alpha, l+\alpha[, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

est donc bien définie. D'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq r|u_n - l|.$$

Par une récurrence évidente, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - l| \leq r^n |u_0 - l|.$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers l. ♣

Points fixes répulsifs

Proposition 10.7 *Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I à valeurs dans I et l un point fixe de f appartenant à $\mathring{I}$. Si f est dérivable en l avec $|f'(l)| > 1$, on dit que l est un point fixe répulsif. Si une suite de la forme*

$$\begin{cases} u_0 \in I, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

est convergente vers ce point fixe répulsif l, alors elle est stationnaire. Si, de plus, l'application f est injective alors elle est constante.

Preuve. On considère une application f définie sur un intervalle I à valeurs dans I, $l (\in \overset{\circ}{I})$ un point fixe répulsif de f, c'est-à-dire $f(l) = l$ et $|f'(l)| > 1$. On a

$$\lim_{t \to l} \left| \frac{f(t) - l}{t - l} \right| = |f'(l)|.$$

Soit r un réel appartenant à l'intervalle $]1, |f'(l)|[$. Il existe un réel strictement positif α tel que

$$]l - \alpha, l + \alpha[\subset I,$$

et

$$\forall t \in]l - \alpha, l + \alpha[\setminus \{l\}, \quad \left| \frac{f(t) - l}{t - l} \right| \geq r.$$

Donc,

$$\forall t \in]l - \alpha, l + \alpha[, \quad |f(t) - l| \geq r\,|t - l|.$$

On suppose la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers l. Il exite un entier naturel n_0 vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| < \alpha.$$

En conséquence,

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \geq r|u_n - l|.$$

Par une récurrence évidente, on obtient

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \geq r^{n - n_0} |u_{n_0} - l|.$$

Le réel r étant strictement supérieur à 1, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut être convergente vers l que si

$$|u_{n_0} - l| = 0.$$

Ainsi,

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n = l.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.
Si l'application f est injective, alors l'application f^{n_0} est également injective. De

$$f^{n_0}(u_0) = u_{n_0} = l = f^{n_0}(l),$$

on déduit que $u_0 = l$. ♣

- Théorème solution suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (Toutes les unités MPSI)

- Preuve : Soit r une solution de l'équation caractéristique (Ec) : $r^2 - ar - b = 0$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_{n+1} - r u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

On a :
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - r u_{n+1} \\ &= a u_{n+1} + b u_n - r u_{n+1} \\ &= (a - r) u_{n+1} + b u_n \\ &= (a - r)(u_{n+1} - r u_n) + r(a - r) u_n + b u_n \\ &= (a - r) v_n + (\underbrace{-r^2 + ar + b}_{0}) u_n \\ &= (a - r) v_n \end{aligned}$$

donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $a - r$.

*** Si (E) a deux racines r_1 et r_2 (réelles ou complexes)**

on a $r_1 + r_2 = a$

donc (par la partie précédente), la suite $v'_n = u_{n+1} - r_1 u_n$ est géométrique de raison $q = a - r_1 = r_2$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v'_n = v'_0 r_2^n$

d'où : $u_{n+1} - r_1 u_n = (u_1 - r_1 u_0) r_2^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$

On trouvera de même :

$$u_{n+1} - r_2 u_n = (u_1 - r_2 u_0) r_1^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

de (1)-(2) on trouve : $(r_1 - r_2) u_n = (u_1 - r_2 u_0) r_1^n - (u_1 - r_1 u_0) r_2^n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Comme $r_2 \neq r_1$, on a alors : $u_n = \underbrace{\dfrac{u_1 - r_2 u_0}{r_1 - r_2}} r_1^n - \underbrace{\dfrac{u_1 - r_1 u_0}{r_1 - r_2}} r_2^n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n \ \forall n \in \mathbb{N}$$

*** Si (E) a une racine double r :**

on a alors : $r = \frac{a}{2}$

et la suite $(u_{n+1} - r u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = a - r = \frac{a}{2} = r$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - r u_n = (u_1 - r u_0) r^n$

i.e : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = r u_n + \lambda r^n$ où $\lambda = u_1 - r u_0$

Comme $r \neq 0$ (évident), on a en divisant par r^{n+1} :

$$\frac{u_{n+1}}{r^{n+1}} = \frac{u_n}{r^n} + \frac{\lambda}{r}$$

et en posant $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{r^{n+1}}$ on a : $v_{n+1} = v_n + \dfrac{\lambda}{r}$

donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique et $\exists \lambda_1$ et λ_2 tq :

$$v_n = \lambda_1 n + \lambda_2 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

d'où : $\dfrac{u_n}{r^n} = \lambda_1 n + \lambda_2 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \lambda_1 n r^n + \lambda_2 r^n \ \forall n \in \mathbb{N}$$

C.Q.F.D.

Leçon 202 : Séries à termes réels positifs. Applications.
Développement : (3) Théorème de sommation des relations de compa[...]

I. Généralités:

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels ou complexes. On note S_n et S'_n leurs sommes partielles ($S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$) et R_n et R'_n les suites de leurs restes ($R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$)

– Prop 1 : Condition nécessaire de convergence :
Si une série converge alors son terme général tend vers 0

– Rem : Réciproque fausse ($\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$)

– Théo 2 : Convergence monotone
Une série à termes réels positifs converge ssi la suite de ses sommes partielles est majorée

– Théo 3 : Critère de Cauchy pour les séries
Si $\sum u_n$ est une série à termes réels ou complexes alors :
$\sum u_n$ converge ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall p,q \geq n_0$ entiers on ait :
$$|S_p - S_q| < \varepsilon$$

– Exple : $\sum \frac{1}{n!}$ est convergente

II. Théorème de comparaison:

Ici : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes réels positifs

– Théo 4 : Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0$ on a $u_n \leq v_n$ alors :

1) Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge
2) Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

– Exemple : $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$

– Théo 5 : Règle de d'Alembert
Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$ alors :
1) si $\lambda < 1$ alors $\sum u_n$ converge
2) si $\lambda > 1$ alors $\sum u_n$ diverge

– Exple : $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge

– Théo 6 : Règle de Cauchy
Si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$ alors :
1) si $\lambda < 1$ alors $\sum u_n$ converge
2) si $\lambda > 1$ alors $\sum u_n$ diverge

– Exple : $\sum \frac{2^n}{n^3}$ diverge

– Prop 7 : [...]
$v_n =$ [...]
1) Si $\sum$ [...]
conv[...]
R'_n [...]
2) Si $\sum$ [...]
dive[...]
S'_n [...]

– Prop 8 : [...]
alors : 1) [...]
ma[...]
2) [...]
3) [...]

– Prop 9 : [...]
une fo[...]
alors [...]
de m[...]

IV. Prod[...]
à valeu[...]
– Déf 1[...]
des s[...]

de comparaison

- Prop 7 : on suppose $v_n = o(u_n)$ (resp $v_n = O(u_n)$).
  1/ si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge et $R'_n = o(R_n)$ (resp. $R'_n = O(R_n)$)
  2/ si $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n$ diverge et $S'_n = o(S_n)$ (resp $S'_n = O(S_n)$)
- Prop 8 : on suppose $u_n \sim v_n$, alors : 1/ $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de même nature
  2/ si elles convergent, alors $R'_n \sim R_n$
  3/ si elles divergent, alors $S'_n \sim S_n$
- Prop 9 : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [a; +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante. alors $\sum_{n \geq a} f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

IV. Produit de Cauchy de 2 séries à valeurs réelles positives

- Déf 10 : On appelle série de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série $\sum w_n$ où $\forall n \in \mathbb{N} : w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$
- Théo 11 : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes alors $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$

IV. Applications : Séries de références :

1/ Séries de Riemann :

- Prop 12 : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ converge ssi $\alpha > 1$
- Ex : détermination constante d'Euler
- Cor 13 : Règle de Riemann ; si $\sum u_n$ à termes positifs, et $\alpha \in \mathbb{R}$, si $n^\alpha u_n \to l \in \mathbb{R}_+^*$ alors :
  1/ si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge
  2/ si $\alpha < 1$, $\sum v_n$ diverge

2/ Séries de Bertrand :

- Prop 14 : $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ converge ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

* Prérequis : suite, ss-suite, Cauchy, notation sur les séries, convergence, séries géométriques, intégrales impropres

* Livres : Dantzer ; 66 leçons ; Méthodes MPSI

Compléments leçon 202

- **Théo 1.** suite ↗ majorée

- **Théo 2.** critère de Cauchy
critère de Cauchy pour les suites appliqué à $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$
① suite convergente ⟺ suite de Cauchy
② Toute suite Cauchy est bornée
③ Bolzano-Weierstrass. Tte suite réelle bornée admet une s. suite convergente
④ Tte suite de Cauchy possède une s. suite convergente

- **Théo 5.** D'Alembert
① si $\lambda<1$, $\exists k\in]\lambda,1[$ et n_0 tq $\forall n\geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq k$
$\rightarrow u_{n+1}\leq k u_n$
$\rightarrow 0\leq u_n\leq \underbrace{k^{n-n_0}u_{n_0}}_{\text{t.g. d. s.g. convergente}}$

② Si $\lambda>1$, $\exists k\in]1,\lambda[$
$\longrightarrow 0\leq \underbrace{k^{n-n_0}u_{n_0}}_{\text{diverge}}\leq u_n$

- **Théo 6.** Cauchy
① Si $\lambda<1$, $\exists k\in]\lambda,1[$
$\rightarrow \forall n\geq n_0$, $\sqrt[n]{u_n}\leq k$
$\rightarrow \qquad u_n\leq \underbrace{k^n}_{\text{converge}}$

② Si $\lambda>1$, $\exists k\in]1,\lambda[$
$\rightarrow \sqrt[n]{u_n}\geq k$
$\rightarrow u_n\geq \underbrace{k^n}_{\text{diverge}}$

- **Prop 7:** $v_n=o(u_n)$
$\forall n\geq n_0$, $0\leq v_n\leq \varepsilon u_n$
① si S majorant de $\sum u_n$
$\forall n\geq n_0$, $S'_n=\sum_{k=0}^{+\infty}v_k\leq\sum_{k=0}^{n_0}v_k+\varepsilon S$
donc S'_n majorée
→ convergence
$\forall n\geq n_0$,
$\forall N\geq n+1$, $\sum_{k=n+1}^{N}v_k\leq\varepsilon\sum_{k=n+1}^{N}u_k$
à la limite qd $N\to+\infty$:
$R'_n\leq\varepsilon R_n$
c.q.f.d.

② $(S'_n)_n$ non majorée
$\longrightarrow (S'_n-S'_{n_0})$ aussi
$\forall n>n_0$, $S_n-S_{n_0}=\sum_{k=n_0+1}^{n}u_k$
$\geq\underbrace{\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=n_0+1}^{n}v_k}$
$\frac{1}{\varepsilon}(S'_n-S'_{n_0})$
diverge
comme $(S_n)_n$ non majorée et croissante, $\exists n_1\geq n_0$ tq :
$\forall n\geq n_1$, $S_n\geq\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n_0}v_k$
$\longrightarrow S'_n=\sum_{k=0}^{n_0}v_k+\sum_{k=n_0+1}^{n}v_k$
$\leq\varepsilon S_n+\varepsilon\sum_{k=n_0+1}^{n}u_k$
$\leq 2\varepsilon S_n$
$\longrightarrow S'_n=o(S_n)$

ES

u_k

$=1$

– Prop 8 :

① vient de la prop. 7

② on a : $|u_n - v_n| = o(v_n)$ (*)

$\rightarrow \sum |u_n - v_n|$ converge

on note : $R''_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k - v_k|$

$\forall n, \forall N > n+1$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{N} (u_k - v_k) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{N} |u_k - v_k|$$

à la limite $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|R_n - R'_n| \leq R''_n$$

et comme $R''_n = o(R'_n)$ (*)

$\longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,$
$|R_n - R'_n| \leq R''_n < \varepsilon R'_n$

$\longrightarrow (R_n - R'_n) = o(R'_n)$

$\longrightarrow R_n \sim R'_n$

③ Si $(S_n - S'_n)_n$ diverge

comme $|u_n - v_n| = o(v_n)$

$\longrightarrow S''_n = o(S'_n)$

$\longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq :
$\forall n \geq n_0, |S_n - S'_n| = o(S'_n)$

Si $(S_n - S'_n)_n$ converge

$\rightarrow$ elle est bornée

$(S'_n)_n \longrightarrow +\infty$ et

$\left(\frac{S_n - S''_n}{S'_n}\right)_n \rightarrow 0$

donc $(S_n - S'_n) = o(S'_n)$

$\Rightarrow S_n \sim S'_n$

– Prop 9 :

Soit $n_0 \geq a$

Comme $f \searrow$ on a $\forall k \geq n_0$:

$$u_{k+1} = f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k) = u_k$$

$\rightarrow \forall n > n_0$:

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leq \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} u_k$$

etc.

– Prop 10 :

. si $\alpha \leq 0$, $\frac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0

donc la série diverge

. si $\alpha > 0$.

Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
$t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$

Comme f continue, positive, décroissante,

alors $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge

si $\alpha = 1$: $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \ln t$ diverge

si $\alpha \neq 1$:

$$\int_1^{\cancel{+\infty}} \frac{dt}{t^\alpha} = \int t^{-\alpha}\,dt$$

$$= t^{-\alpha+1} \times \frac{1}{1-\alpha}$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}$$

converge en $+\infty$ ssi $\alpha > 1$

— Exo, 13 → utiliser intégrales impropres

— Cor 11:

on a: $a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln n$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{t.g. d'une série convergente Riemann}}$$

donc la série $\sum_{n \geq 1} |a_{n+1} - a_n|$ converge donc la série $\sum_{n \geq 1} (a_{n+1} - a_n)$ converge

donc la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ converge

$\Big($car $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} (a_{n+1} - a_n)}_{\xrightarrow[+\infty]{} \ell} + a_1 \xrightarrow[+\infty]{} \ell + a_1$

Si on pose $\gamma = \lim_{+\infty} a_n$, on a: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$

Leçon 203 : Séries à termes réels ou complexes: convergence absolue, sem
Développement : (4) Règle d'Abel + exemple

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I. Critère de Cauchy:

- Déf 1: Une série $\sum u_n$ à valeur dans $\mathbb{K}$ est de Cauchy si elle vérifie la propriété:
$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}$ tq: $q\geq p\geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=p}^{q} u_k\right|<\varepsilon$

(ORAL: série de Cauchy ssi la suite de ses sommes partielles de Cauchy)

- Théo 2: Une série $\sum u_n$ à valeur dans $\mathbb{K}$ est convergente ssi elle est de Cauchy
- Rem: $\sum u_n$ converge ssi $\sum \mathrm{Im}\, u_n$ et $\sum \mathrm{Re}\, u_n$ conv

II. Absolue convergence et semi-convergence:

Soit $\sum u_n$ une série à valeur dans $\mathbb{K}$

- Déf 3: On dit que $\sum u_n$ est absolument convergente si $\sum |u_n|$ est convergente
- Théo 4: Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.
- Rem: Réciproque fausse. Par exemple $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument.

ORAL: l'absolue convergence est pratique à utiliser avec la règle pour les séries positives (Cauchy, D'Alembert).

- Déf 5: Si une série $\sum u_n$ converge mais n'est pas absolument convergente on dit qu'elle est semi-convergente.
- Théo 6: Règle d'Abel:
Si pour tout n de $\mathbb{N}$ on a: $u_n=\alpha_n v_n$
où: • $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite positive, décroissante et convergente vers 0
• $\exists M\in\mathbb{R}^+$ tq $\forall n\in\mathbb{N}$: $|S_n|=\left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right|\leq M$
Alors la série $\sum u_n$ est convergente
- Exemple: étude de $\sum u_n$ où $u_n=\frac{e^{in\theta}}{n^{\alpha}}$

III. Séries alternées:

- Déf 7: On dit qu'une série $\sum u_n$ à valeur réelle est une série alternée s'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive et $\varepsilon=\pm 1$ tq: $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\varepsilon(-1)^n\alpha_n$
- Théo 8: Théo spécial des séries alternées
Si $\sum u_n$ est une série alternée et si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

on déc
Série $\sum$
$\forall n$

- Exemple
* La s
* La s
et

IV. Sé

Soit
- Déf 9
commu
si elle
toute
Série
ave
- Prop 1
abso
elle
con
- Rem:
réc

...e absolue, semi-convergence.

...erge
...ergente
...convergente.

...
...
...

...
...
...
...

...
...

...convergente
...série
...n^α

...érie
...est
...

...

...x_n

... alternée
...ternée
...n 0

en décroissant, alors la série $\sum u_n$ converge et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq |u_{n+1}|$$

- Exemples :
  * La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ est convergente
  * La série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ est convergente.

IV. Série commutativement convergente

Soit $\sum u_n$ série à valeur dans $\mathbb{K}$

- Déf 9 : On dit que $\sum u_n$ est commutativement convergente si elle est convergente et si pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$ la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente avec : $\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$

- Prop 10 : Une série $\sum u_n$ est absolument convergente ssi elle est commutativement convergente.

- Rem : Pour une série à termes réels positifs, la nature et la limite sont indépendantes de l'ordre de sommation.

V. Produit de Cauchy de deux séries

- Déf 11 : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle produit de Cauchy de la série $\sum u_n$ avec la série $\sum v_n$, la série $\sum w_n$ où : $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}$

- Théo 12 : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à valeurs dans $\mathbb{K}$ absolument convergentes, alors le produit de Cauchy $\sum w_n$ est une série absolument convergente et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$

* Prérequis : série à termes positifs, suites, suites de Cauchy, suites adjacentes, convergence des séries à termes positifs

* Livres : Dantzer, 66 leçons, Oral en poche, Cours particulier.

- Théorème spécial des séries alternées:

- Preuve : Supposons que $u_n = (-1)^n |u_n|$
Définissons $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^n |u_n|$ (somme partielle d'ordre n de la série.)

- Démontrons que $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes:

On a $\forall p\in\mathbb{N}$: $S_{2p+2} - S_{2p} = \underbrace{|u_{2p+2}| - |u_{2p+1}|}_{\leq 0}$ (car $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante)

et $\forall p\in\mathbb{N}$: $S_{2p+1} - S_{2p+1} = \underbrace{-|u_{2p+1}| + |u_{2p}|}_{\geq 0}$

on en déduit que $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ croissante

Maintenant : $\forall p\in\mathbb{N}$, $S_{2p} - S_{2p+1} = |u_{2p+1}| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

donc les suites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Donc : la <u>série $\sum u_n$ est convergente</u>

- Soit maintenant S la limite commune à $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$.
alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|S - S_n| \leq \underbrace{|S_{n+1} - S_n|}_{\leq |u_{n+1}|}$ $(*)$

donc on a bien : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq |u_{n+1}|$

car : $S_{2p-1} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} u_k}_{S} \leq S_{2p} \Rightarrow S - S_{2p-1} \leq S_{2p} - S_{2p-1}$

si n pair : $S_{n-1} \leq S \leq S_n \Rightarrow S - S_{n-1} \leq S_n - S_{n-1}$
si n impair : $S_n \leq S \leq S_{n+1} \Rightarrow S - S_n \leq S_{n+1} - S_n$

- Théo 12 : Produit de Cauchy:

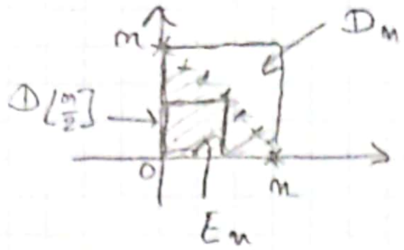
- Preuve : Posons : $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$

$D_n = [\![0,n]\!]^2$ et $E_n = \{(p,q)\in\mathbb{N}^2 / p+q \leq n\}$

On a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $W_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p+q=k} u_p v_q\right) = \sum_{(p,q)\in E_n} u_p v_q$

$U_n V_n = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) = \sum_{(p,q)\in D_n} (u_p v_q)$

• Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$:



On a. $D_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \subset E_n \subset D_n$

donc. $\underbrace{U_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} V_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}_{\to UV} \leq W_n \leq \underbrace{U_n V_n}_{\to UV}$

• Si on applique le cas précédent aux série $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$, on a la convergence de la série :

$$\sum w'_n, \text{ où } w'_n = \sum_{p+q=n} |u_p||v_q|$$

et donc celle de $\sum |w_n|$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |W_n - U_n V_n| = \left| \sum_{(p,q) \in D_n \setminus E_n} u_p v_q \right| \leq \underbrace{\sum_{(p,q) \in D_n \setminus E_n} |u_p||v_q|}_{\to 0 \text{ d'après le } 1^{\circ} \text{ cas}}$$

donc $W_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} U_n V_n$

et c'est démontré.

Prop 10. si $\sum u_n$ abs. convergente alors $\sum u_n$ commutativement convergente

Preuve: Soit $\sum u_n$ une série abs. convergente.
Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq :

$$\forall p \geq n_0, \forall q \geq p, \sum_{n=p}^{q} |u_n| \leq \varepsilon$$

d'où à la limite : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n| \leq \varepsilon$

Considérons σ une permutation de $\mathbb{N}$ et soit : $I = \sigma^{-1}(\llbracket 0 ; n_0 \rrbracket)$
On a :

$\text{Card}(I) = n_0 + 1$ est fini, donc soit n_1 son maximum

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq n_1$, alors on a : $I \subset \llbracket 0 ; n \rrbracket$
Soit maintenant :

$$J = \llbracket 0 ; n \rrbracket \setminus I$$

On a alors,

$$\sum_{i=0}^{n} u_{\sigma(i)} = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)} + \sum_{i \in J} u_{\sigma(i)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \sum_{i \in J} u_{\sigma(i)}$$

On a $\sigma(J)$ de cardinal fini et $\forall m \in \sigma(J)$ on a : $m \geq n_0$
donc soit $p = \min(J)$ et $q = \max(J)$
On a alors :

$$\left| \sum_{i \in J} u_{\sigma(i)} \right| \leq \sum_{i \in J} |u_{\sigma(i)}| \leq \sum_{k=p}^{q} |u_k| \leq \varepsilon$$

d'où : $\left| \sum_{i=0}^{n} u_{\sigma(i)} - \sum_{i=0}^{+\infty} u_i \right| = \left| \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)} - \sum_{i=0}^{+\infty} u_i + \sum_{i \in J} u_{\sigma(i)} \right|$

Cony 203.2

$$\leq \left| \sum_{l=0}^{n_0} u_l - \sum_{i=0}^{+\infty} u_i \right| + \left| \sum_{i\in J} u_{\sigma(i)} \right|$$

$$\leq \quad \varepsilon \quad + \varepsilon$$

$$\leq 2\varepsilon$$

donc $\sum u_l$ est commutativement convergente

_ La réciproque est vraie pour les séries à valeurs réelles ou complexes.

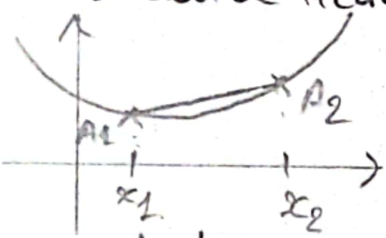
Leçon 208 : Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.
Développement : ⑧ Hölder. Minkowski

I. Définition et propriétés :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeurs réelles.

- Déf 1 : On dit que f est convexe sur I si $\forall (x_1; x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0;1]$, on a : $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

- Rem 1 : Si $\mathcal{C}_f$ est le graphe de f sur I, f est convexe ssi $\forall A_1(x_1; f(x_1))$ et $A_2(x_2; f(x_2))$, le graphe de $f|_{[x_1;x_2]}$ est en dessous de la corde $[A_1 A_2]$



- Rem 2 : Si $-f$ est convexe on dit que f est concave

- Exemples 1) $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$
  2) $f : x \mapsto ax+b$ est convexe et concave sur $\mathbb{R}$

- Prop 2 : Inégalité de Jensen
  Si f est convexe et si $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ famille de réels positifs tq $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ alors $\forall (x_1; ...; x_n) \in I^n$ on a :
  $$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

II. Différentes caractérisations des fonctions convexes :

I : intervalle de $\mathbb{R}$, f fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles

1) Caractérisation géométrique :

- Déf 3 : On appelle épigraphe de f l'ensemble : $\mathcal{E}_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x \in I$ et $f(x) \leq y\}$

- Prop 4 : f est convexe sur I ssi son épigraphe est une partie convexe sur I, i.e. ssi : $\forall (M_1(x_1;y_1); M_2(x_2;y_2)) \in \mathcal{E}_f^2$ on a : $[M_1 M_2] \subset \mathcal{E}_f$

2) Caractérisation par les pentes :

- Prop 5 : Soient $(x_1; x_2; x_3) \in I^3$ tq $x_1 < x_2 < x_3$. On a équivalence entre : 1) f convexe
  2) $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$
  3) $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$
  4) $\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$

3)

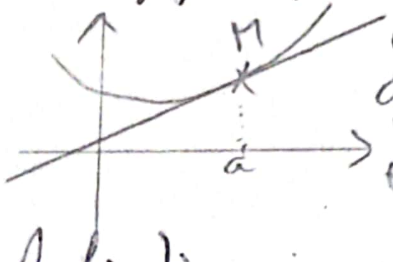
III

1)

ication

3) Caractérisation par la dérivée et la dérivée seconde:

- **Prop 6:** Si f dérivable sur I, alors la fonction f est convexe sur I ssi la fonction f' est croissante sur I.
- **Prop 7:** Si f deux fois dérivable sur I, alors f est convexe sur I ssi la fonction f'' est positive sur I.
- **Exemples:** 1/ $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$
  2/ $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$
- **Cor 8:** Si f convexe sur I alors: $\forall x \in I,\ f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a)$



Courbe au dessus de la tangente en tout pt.

III. Applications

1) Comparaison de moyennes

- **Prop 9:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. On a:

$$\underbrace{\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}}_{\text{moyenne harmonique}} \leq \underbrace{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}_{\text{géométrique}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}}_{\text{arithmétique}}$$

2) Inégalités de Hölder et Minkowski:

- **Théo 10: Hölder.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p, q \in]1; +\infty[$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $\forall (x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}_+^n$ on a:

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

- **Cor 11: Minkowski.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p, q \in]1; +\infty[$. Alors $\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n$ on a:

$$(**) \quad \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

3) Intégrale d'une fonction convexe:

- **Prop 12:** Soient a, b de $\mathbb{R}$, tq $a \leq b$ et f fonction convexe de classe C^1 sur $[a;b]$. On a alors:

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$(*) \Rightarrow$ Cauchy-Schwarz
$(**) \Rightarrow$ Inégalité triangulaire

* Prérequis: fonctions, dérivabilité, barycentres et

* Livre: 66 leçons Maths en tête

Leçon 211. : Série de fonction Propriétés de la somme. Exemple

Développement : (22) Critère d'Abel uniforme

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(E, \|\cdot\|)$ $\mathbb{K}$-e.v.n.
X ensemble non vide
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$: suite de fonction définies sur X à valeur dans E
$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$: suite des sommes partielles de la série $\sum f_n$: $S_n=\sum_{k=0}^{n} f_k$
$(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$: suite des restes : $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$
Norme infinie : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}\|f(x)\|$
? à projeter ?

I Différents modes de convergence :

- Déf 1 : On dit que la série de fonction $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge :
  1. simplement sur X si : $\forall x\in X$, $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge
  2. absolument sur X si la série $\sum_{n\geq 0}\|f_n\|$ converge simplement sur X
  3. uniformément sur X si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X

- Prop 2 : Soit f une fonction définie sur X à valeur dans E. La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément vers f sur X ssi : $\lim_{n\to+\infty}\left\|\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)-f(x)\right\|_\infty = 0$

- Rem : convergence absolue → conv. simple
  convergence uniforme → conv. simple

- Prop 3 : La série de fonction $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur X ssi :
  1) La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur X
  2) La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur X.

- Prop 4 : Si la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur X, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

- Théo 5 : Critère d'Abel uniforme
  Si E est complet et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction à valeur dans $\mathbb{R}$, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle I tel que :
  1) $\exists M>0, \forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in I$, $\left\|\sum_{p=0}^{n} f_p(x)\right\|\leq M$
  2) La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers 0 en décroissant
  Alors la série $\sum_{n\geq 0} g_n f_n$ converge uniformément sur I.

II. (
- Déf
non
m
e
- Prop 7
ssi
Exp
???
- Théo
Con
con
U(
- Rem
- Exe

III. F
1) C
- Th
e
d

ples

simple
simple
n
:
lent
e
se
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$
ne
$\in\mathbb{N}$
dans $\mathbb{R}$,
r

n
erge

II. Convergence normale.

- Déf 6 : La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur X si la série $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty = \sum_{n\geq 0} \sup \|f_n(x)\|$ est convergente.

- Prop 7 : $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement ssi il existe une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq : 1/ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x\in X, \|f_n(x)\| \leq a_n$
??? 2/ la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge
... inutile !

- Théo 8 : Si la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur X dans E complet alors elle converge uniformément sur X.

- Rem : conv. normale $\rightarrow$ conv. absolue
- Exemple : À TROUVER

III. Propriétés de la somme.

1) Continuité :

- Théo 9 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fctions définies et continues sur un espace métrique (A,d) à valeur dans E. Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ uniformément convergente sur A vers une fonction S, alors S est continue sur A.

2) Intégration : — Exemple 66 lesne

- Théo 10 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonction définies et continues sur un segment $[a,b]$ à valeur dans E complet. Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ uniformément convergente sur $[a,b]$ alors : $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n(t)dt$

- Exemple : À TROUVER !

3) Dérivation :

- Théo 11 : Soit X intervalle de $\mathbb{R}$ et E complet et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonction de classe C^1 sur X.
on suppose : 1/ $\exists x_0 \in X$ tq $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ converge
2/ la série $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge uniformément sur X
alors : 1/ $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers une fction S de classe C^1 tq : $\forall x \in X, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$
2/ Si X borné, la convergence est uniforme

- Exemple : À TROUVER

* Prérequis : suites de fonction, séries numérique (convergence, critère d'Abel et de Cauchy) intégration, dérivation, suite réelle
* Dantzer, BURG & MP pour exos

Leçon 212 : Séries entières d'une variable réelle ou complexe. R

Développement : (E.3) Rayon de convergence et exemple (ou 1°

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

I. Séries entière et rayon de convergence

– Déf 1 : On appelle série entière de variable réelle (ou complexe) toute série de fonction de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ où x variable réelle (ou complexe).

– Déf 2 : On note E l'ensemble $E=\{r\geq 0 / (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite bornée$\}$

E est non vide et minorée par 0. L'élément $R=\operatorname{Sup} E$ (de $[0;+\infty]$) est appelé rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$

– Prop 3 : Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ série entière de rayon de convergence R. Soit $x\in\mathbb{K}$.

1) Si $|x|<R$ alors la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est absolument convergente

2) Si $|x|>R$ alors la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est divergente.

– Prop 4 : Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ série entière.

1) Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $R\geq 1$

2) Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 alors $R\leq 1$

– Exemple : Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq a_n est la $n^{ième}$ décimale de π, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ a 1 comme rayon de convergence

II. Détermination du rayon de convergence :

– Prop 5 : Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$. Alors les séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha a_n x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_n}{n^\alpha} x^n$ ont le même rayon de convergence.

– Prop 6 : Règle de d'Alembert

Si $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lambda$ avec $\lambda\in[0;+\infty]$ alors $R=\frac{1}{\lambda}$ (avec $\frac{1}{0}=+\infty$ et $\frac{1}{+\infty}=0$)

– Prop 7 : Règle de Cauchy

Si $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lambda$ avec $\lambda\in[0;+\infty]$, alors $R=\frac{1}{\lambda}$ (même convention que d'Alembert)

– Exemples : (2 séries où on peut utiliser Cauchy et d'Alembert)

III. Propriétés de la somme :

– Prop 8 : Une série entière de variable réelle converge normalement sur tout segment de la forme $[-a;a]$

où
co

– Th
V
é
A
∀

– Co
l'i
∀

– Prop
et
se
A
$\sum$
$n\geq$
C

– Exem
de $\sum$
$n=$

...omplexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.

...ple. (ou 1° Comptant de la leçon)

la ... ière ... convergence ... séries $\sum \frac{a_n}{n^\alpha} x^n$ ... gence. ... ec $= \frac{1}{\lambda}$ ... avec $\frac{1}{\lambda}$ ... ble ... sur $[-a;a]$

où $a \in]0;R[$, où R rayon de convergence de la série.

– Théo 9 : Soit la série entière de variable réelle $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $R>0$ son rayon de convergence. Alors f est dérivable sur l'intervalle $]-R;R[$ et on a :
$\forall x \in]-R,R[$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$
Cette série dérivée admet aussi R comme rayon de convergence.

– Cor 10 : f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-R;R[$ et on a :
$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]-R,R[$,
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$$
(de rayon de convergence R)

– Prop 11 : Soit une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et z_0 complexe. On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ est convergente.
Alors la série entière de variable t réel $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n t^n$ converge uniformément sur le segment $[0;1]$ et la somme est continue sur ce segment.

– Exemple : ensemble de définition et sommes de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

IV. Opération avec les séries entières :

– Déf 12 : La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n+b_n) x^n$ est appelée série entière somme des deux séries : $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$

– Prop 13 : Si R_a et R_b rayons respectifs des séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$
alors : 1) $R_{a+b} \geq \mathrm{Min}(R_a;R_b)$
2) $R_{a+b} = \mathrm{Min}(R_a;R_b)$ si $R_a \neq R_b$
où R_{a+b} est le rayon de convergence de la série somme

– Déf 14 : On appelle produit de Cauchy des deux séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$ la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n$ où :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

– Prop 15 : Si R_c est le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ alors :
1) $R_c \geq \mathrm{Min}(R_a;R_b)$
2) $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \mathrm{Min}(R_a;R_b)$
on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$

✗ Prérequis : suites et séries numériques, suites et séries de fonctions

✗ Livre : Dantzer (MP Maths par exemple)

* Complément leçon 212 : Séries entières d'une variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemple

- Prop. : $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha a_n x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_n}{n^\alpha} x^n$ ont le même rayon de convergence ($\alpha \in \mathbb{R}_+^*$)

- Démonstration : (Dantzer) Soit $E = \{r \geq 0 / (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite bornée}\}$

et $E' = \{r \geq 0 / (n^\alpha a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite bornée}\}$

$R = \operatorname{Sup} E$ et $R' = \operatorname{Sup} E'$

- On a : $E' \subset E$ car si $r \in E'$, il existe M tel que $|n^\alpha a_n r^n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

d'où $|a_n r^n| \leq |n^\alpha a_n r^n| \leq M$
et $r \in E$

d'où $\underline{R' \leq R}$

- Si $R = 0$ alors $R' = 0$
- Supposons que $0 < R < +\infty$

soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\varepsilon < R$

et soit $r \in E$ tel que $R - \frac{\varepsilon}{2} < r \leq R$

On sait que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

et on a : $r > R - \frac{\varepsilon}{2}$ donc $r - \frac{\varepsilon}{2} > R - \varepsilon > 0$

Considérons la suite $\left(n^\alpha a_n \left(r - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n^\alpha a_n \left(r - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n = \underbrace{(a_n r^n)}_{\text{bornée}} n^\alpha \Bigg(\underbrace{\frac{r - \frac{\varepsilon}{2}}{r}}_{<1}\Bigg)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $\underbrace{\left(r - \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{r'} \in E'$

donc : $\forall \varepsilon \in]0; R[$, $\exists r' \in E'$ tq $r' > R - \varepsilon$

donc R est le plus petit majorant de E'

d'où $\underline{R = R'}$

• Si $R=+\infty$:

Soit $A\in\mathbb{R}^+$ et $r\in E$ tel que $r\geq A+1$

La suite $(n^\alpha a_n(r-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc $r-1$ appartient à E'

et $r-1\geq A$

donc E' est non majoré, et $R'=+\infty$

$R_{a_n z^n}=R_{n^\alpha \frac{a_n}{n^\alpha} z^n}$

$a_n=n^\alpha\left(\frac{a_n}{n^\alpha}\right)$

$\Rightarrow$

$R_{a_n z^n}=R_{n^\alpha\left(\frac{a_n}{n^\alpha}\right)x^n}$

$=R_{\frac{a_n}{n^\alpha}x^n}$

• On a : $\forall n>0,\ a_n=n^\alpha\left(\frac{a_n}{n^\alpha}\right)$

donc les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{a_n}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}n^\alpha\left(\frac{a_n}{n^\alpha}\right)$ ont le même rayon de convergence.

donc les trois séries ont le même rayon de convergence

- Prop : On suppose que la série $\sum_{n\geq 0}a_n z_0^n$ est convergente pour $z_0\in\mathbb{C}$.

Alors la série entière de variable t, $\sum_{n\geq 0}a_n z_0^n t^n$ converge uniformément vers le segment $[0;1]$ et la somme est continue sur ce segment.

- Démonstration : (Dantzer)

Soit : $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k z_0^k\quad\forall n\in\mathbb{N}$

$\forall t\in[0;1]$ et $\forall (p;q)\in\mathbb{N}^2$ tel que $1\leq p\leq q$ on a :

$$\sum_{k=p}^{q}a_k z_0^k t^k=\sum_{k=p}^{q}(R_{k-1}-R_k)t^k$$

$$=\sum_{k=p}^{q}R_{k-1}t^k-\sum_{k=p}^{q}R_k t^k$$

$$=\sum_{k=p-1}^{q-1}R_k t^{k+1}-\sum_{k=p}^{q}R_k t^k$$

$$=t^p R_{p-1}-t^q R_q+\sum_{k=p}^{q-1}(t^{k+1}-t^k)R_k$$

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tels que : $\forall n\geq n_0,\ |R_n|\leq\varepsilon$ (possible car $\sum_{n\geq 0}a_n z_0^n$ converge)

Alors pour tous entiers p et q tels que $n_0<p<q$ on a :

$$\forall t\in[0;1],\ \left|\sum_{k=p}^{q} a_k z_0^k t^k\right| \leq \left|t^p R_{p-1}\right| + \left|t^q R_q\right| + \left|\sum_{k=p}^{q-1}(t^{k+1}-t^k)R_k\right|$$
$$\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \sum_{k=p}^{q-1}\underbrace{(t^{k+1}-t^k)}_{\in[0,1]}$$
$$\leq 3\varepsilon$$

donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n t^n$ est uniformément de Cauchy sur le segment $[0;1]$, donc uniformément convergente sur ce segment. de plus $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n t^n$ est continue sur $[0;1]$

Exemple: Ensemble de définition et somme des fonctions :

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad f_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n \qquad f_3(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$
$$f_4(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} \qquad f_5(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Solution: (Dantzer)

- Critère de d'Alembert pour le rayon de convergence.
  $R=1$ pour f_1, f_2, f_3 et f_4 et $R=+\infty$ pour f_5
- Ensemble de définition de f_1 : $]-1;1[$
  Série géométrique de raison 1 : $\forall x\in]-1;1[,\ f_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$
- ensemble de déf de f_2 : $]-1;1[$
  par le théorème de dérivation des séries entières, f_1 dérivable sur $]-1;1[$,
  et $\forall x\in]-1;1[,\ f_1'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$
  d'où $\forall x\in]-1;1[,\ x f_1'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = f_2(x)$
  d'où $\forall x\in]-1;1[,\ f_2(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$
- ensemble de déf. de f_3 : $]-1;1[$
  $\forall x\in]-1;1[,\ f_3'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \dfrac{1}{1-x}\ (=f_1(x))$

on a $f_3(0)=0$, donc : $\forall x \in]-1;1[, f_3(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t}$

$$= \left[-\ln(1-t)\right]_0^x$$

$$= -\ln(1-x) - (-\ln(1))$$

$$= -\ln(1-x)$$

Par la prop (précédente), f_3 est continue sur le segment $[-1;0]$

donc : $\underline{\forall x \in [-1;1[, f_3(x) = -\ln(1-x)}$

- ensemble de déf. de f_4 est $]-1;1[$

$\forall x \in]-1;1[, f_4'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = f_3(x)$

on a $f_4(0)=0$, donc : $\forall x \in]-1;1[, f_4(x) = \int_0^x -\ln(1-t)\,dt$

$\int -\ln t\,dt = [t \ln t] + \int \frac{t}{t}\,dt$

$= (1-x)\ln(1-x) - 1\ln(1)$

$+ \underbrace{\int_0^x 1\,dt}_{x}$

$$= (1-x)\ln(1-x) + x$$

et par la proposition (précédente), f_4 continue sur $[-1;1[$

donc $\underline{\forall x \in [-1;1[, f_4(x) = (1-x)\ln(1-x) + x}$

- ensemble de définition de f_5 est $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f_5'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = f_5(x)$

et $f_5(0) = 1$

donc $\underline{\forall x \in \mathbb{R}, f_5(x) = \exp(x)}$

Leçon 215 : Intégrale impropre d'une fonction continue sur un

Dév : 26 Critère Cauchy pour Intégrale + Règle Abel

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et les fctions considérées sont continues sur l'intervalle.

I. Définition des intégrales impropres

- Déf 1 : Soit $f : [a;b[\to \mathbb{K}$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$. Si $\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt$ existe on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge et on note :
$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt$$
Sinon on dit qu'elle diverge.
(oral : on définition avec $]a;b]$)

- Déf 2 : Soit $I =]a;b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ et $c \in I$.
On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si les deux intégrales impropres $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ le sont.

- Exemple : $\int_{-\infty}^{+\infty} t^3 dt$ diverge

- Rem : Comme pour les intégrales sur un segment, la linéarité et la positivité sont vraies pour les intégrales impropres convergentes

II. Fonctions positives :

- Prop 3 : Si $f : [a;b[\to \mathbb{R}^+$ on a : $\int_a^b f(t)dt$ converge ssi : $\exists M \geq 0$ tq $\forall x \in [a;b[, \int_a^x f(t)dt \leq M$

- Rem : Si divergence on notera : $\int_a^b f(t)dt = +\infty$

- Prop 4 : Si $0 \leq f \leq g$ alors :
1) $\int_a^b g(t)dt$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t)dt$ converge
2) $\int_a^b f(t)dt$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(t)dt$ diverge

- Exemples : Intégrale de Bertrand
Soit α, β deux réels. On a :
  - $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$ converge ssi $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1, \beta > 1)$
  - $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ converge ssi $\alpha < 1$ ou $(\alpha = 1, \beta > 1)$

- Prop 5 : Si $f \underset{b}{\sim} g$ et f, g positives alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

- Exemple : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$

III. Intégration par parties :

f, g de classe C^1 sur $[a;b[$ à

sur un intervalle de $\mathbb{R}$ (intégration sur segment connue). Exemples.

valeur dans $\mathbb{K}$.

– Prop 6 : 1/ si $\lim_{x \to b} f(x)g(x)$ existe, alors : $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ et $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ sont de même nature

2/ si elles convergent alors :
$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \left[\lim_{x \to b} f(x)g(x) - f(a)g(a)\right] - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

– Exempl : $\int_0^1 \ln(t)dt = -1$

IV. Changement de variable :

– Prop 7 : Soit u de classe $\mathcal{C}^1$ bijective, strictement croissante de $[a;b[$ dans $[\alpha;\beta[$ et f continue sur $[\alpha;\beta[$ à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors : $\int_a^b u'(t)f(u(t))dt$ et $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

V. Propriétés des intégrales impropres :

$f, g : [a;b[\to \mathbb{K}$ continues

– Prop 8 : Critère de Cauchy pour intégrales : $\int_a^b f(t)dt$ converge ssi : $\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a;b[$ tq $\forall (x;y) \in ([c;b[)^2$
$$\left|\int_x^y f(t)dt\right| < \varepsilon$$

– Cor 10 : Si f bornée sur $[a;b[$ alors $\int_a^b f(t)dt$ convergente

Mettre la règle d'Abel ici.

– Déf 11 : Si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge on dit que l'intégrale généralisée de f est absolument convergente.

– Prop 12 : Si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge

(contrex : semi-convergence)

– Ex : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$ convergente

– Prop 13 : Règle d'Abel :

Si : 1/ f positive, décroissante et $\lim_{x \to b} f(x) = 0$

2/ g à valeur réelle ou complexe et : $\exists M > 0$ tq $\forall x \in [a;b[, \left|\int_a^x g(t)dt\right| \leq M$

alors $\int_a^b f(t)g(t)dt$ converge

– Prop 14 : Soit $f : [a;+\infty[\to \mathbb{K}$ uniformément continue. Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

---

* Livres : 66 leçons et Dantzer

* Prérequis : intégration sur un segment avec chgt de variable, ipp., fction continue

Comp 215

Intégrales de Riemann, Bertrand

Prop : Intégrale de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1/ $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente ssi $\alpha < 1$

2/ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente ssi $\alpha > 1$

Démonstration : $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

1/ L'intégrale est impropre en 0.

Soit $\varepsilon > 0$.

- si $\alpha \neq 1$, $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_\varepsilon^1$

$= \frac{1}{1-\alpha} \left[1 - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right]$

admet une limite finie quand $\varepsilon \to 0$ si $\alpha - 1 < 0$ i.e. $\alpha < 1$

- si $\alpha = 1$, $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = [\ln t]_\varepsilon^1 = \ln 1 - \ln \varepsilon = -\ln \varepsilon$

et $\ln \varepsilon$ n'a pas de limite finie quand $\varepsilon \to 0$

donc $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente ssi $\alpha < 1$

2/ L'intégrale est impropre en $+\infty$:

Soit $x \geq 1$.

- si $\alpha \neq 1$, $\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} \underbrace{\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right)}$

admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$ ssi $\alpha - 1 > 0$, i.e. $\alpha > 1$

- si $\alpha = 1$, $\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \ln(x)$ n'a pas de limite finie quand $x \to +\infty$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ convergente ssi $\alpha > 1$

- Prop. Intégrale de Bertrand

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1/ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} dt$ converge ssi $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$

2/ $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta} dt$ converge ssi $\alpha < 1$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$

- Preuve : 1/ Soit $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto t^{-\alpha}(\ln(t))^{-\beta}$ continue sur $[1; +\infty[$ et positive sur $[e; +\infty[$

on doit étudier en $+\infty$.

• si $\alpha > 1$: $\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{1+\alpha}{2}} f(t) = \lim_{t \to +\infty} t^{\overset{<0}{\frac{1-\alpha}{2}}} (\ln(t))^{-\beta} = 0$

donc on a : $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\underset{>1}{\frac{1+\alpha}{2}}}}\right)$

donc $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge par une comparaison à une intégrale de Riemann.

• si $\alpha < 1$: $\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{1+\alpha}{2}} f(t) = +\infty$

donc $\frac{1}{t^{\underset{<1}{\frac{1+\alpha}{2}}}} \underset{+\infty}{=} o(f(t))$

donc $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ diverge par comparaison à une intégrale de Riemann

• si $\alpha = 1$: $\int f(t) dt = \frac{1}{(1-\beta)(\ln t)^{\beta - 1}}$

donc si $\beta > 1$, convergence
$\beta < 1$, divergence

si $\beta = 1$, $\int f(t) dt = \ln(\ln t)$ et on a divergence

Comp. 2 15 2

4/ Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}$

f continue et positive sur $]0,1]$

donc on doit étudier au voisinage de 0.

• si $\alpha < 1$, $\lim\limits_{t \to 0} t^{\frac{1+\alpha}{2}} f(t) = \lim\limits_{t\to 0} t^{\underbrace{\frac{1-\alpha}{2}}_{>0}} |\ln(t)|^\beta = 0$

donc : $f(t) = o_{\text{en } 0}\left(\dfrac{1}{t^{\underbrace{\frac{1+\alpha}{2}}_{<1}}}\right)$

donc $\int_0^1 f(t)dt$ converge par comparaison à une intégral de Riemann.

• si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{t\to 0} t^{\frac{1+\alpha}{2}} f(t) = \lim\limits_{t \to 0} t^{\underbrace{\frac{1-\alpha}{2}}_{<0}} |\ln(t)|^\beta = +\infty$

donc $\dfrac{1}{t^{\underbrace{\frac{1+\alpha}{2}}_{>1}}} = o_{\text{en } 0}(f(t))$

donc $\int_0^1 f(t)dt$ diverge par comparaison avec une intégrale de Riemann

• si $\alpha = 1$: $\int \frac{1}{t} |\ln(t)|^{-\beta} dt = \dfrac{1}{(1-\beta)|\ln t|^{\beta-1}}$

donc si $\beta > 1$, convergence

si $\beta < 1$, divergence

si $\beta = 1$, $\int f(t)dt = \ln|\ln t|$ et divergence.

Leçon 217: Equations différentielles linéaires d'ordre 2 : x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x=c(t) où a, b et c sont des fonctions continues sur R. à valeurs réelles ou complexes.

Développement : Méthode variation des constantes + exemple
Maths tout en un MPSI (partie I) + Dantzer (Partie2)

I. Equations du second ordre à coefficients constants :

1) Résolution de l'équation homogène :
Proposition de l'équation caractéristique
Cas complexe
Cas réel
2)Résolution de l'équation avec second membre
a)Utilisation d'une solution évidente (exemple)
b)Cas d'une fonction polynôme : proposition
c)Cas d'une fonction exponentielle polynôme : proposition
d)Principe du superposition + cas exp(covctQ(t)+sinvtQ(t))

II. Cas général :

1) Système du premier ordre équivalent :
Ecriture matricielle
2) Problème de Cauchy
3) Solutions de l'équation homogène
Prop :L'espace des solutions du système homogène est de dimension 2
Déf : le Wronskien
Prop du wronskien
4) Résolution de l'équation homogène :
à partir d'une solution ne s'annulant pas sur I par la Méthode de la variation de la constante OU recherche d'une solution développable en série entière
5) Résolution de l'équation avec second membre :
Prop : Espace affine des solutions
Prop : méthode de variation des constantes

Leçon 221 : Parties compactes de $\mathbb{R}^n$. Fonctions continues sur un
Développement : (6) Théorème de Riesz

I. Parties compactes.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-ev. normé.

- Déf 1 : de Borel-Lebesgue : On dit que E est compact ssi de tout recouvrement d'ouvert $(O_i)_{i\in I}$ de E on peut extraire un sous-recouvrement fini.
- Prop 2 : E est compact ssi pour toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de E tq $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, il existe $J \subset I$, J fini, tq $\bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$
- Prop 3 : Si toute suite d'élément de E admet une valeur d'adhérence, alors $\forall \varepsilon>0$, E est la réunion d'un nombre fini de boule de rayon ε.
- Prop 4 : Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'ouvert de E. Si toute suite de E admet une valeur d'adhérence, alors $\exists\, \varepsilon>0$ tq toute boule de rayon ε soit contenue dans un des O_i.
- Théo 5 : de Bolzano-Weierstrass : E est compact ssi toute suite de E admet au moins une valeur d'adhérence.
- Théo 6 : Tout segment $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ est compact.

II. Propriétés des parties compactes.

- Prop 7 : Un espace métrique compact est complet.
- Prop 8 : Un espace métrique compact est borné.
- Prop 9 : Soit A une partie de E.
  1/ Si A partie compacte de E, alors A est un fermé borné de E
  2/ Si E est compact et E fermé de E alors A est compacte.
- Prop 10 : Si $E_1, E_2, \dots, E_m$ sont m e.v.n. compact, alors $E_1\times E_2\times\dots\times E_m$ est compact.
- Prop 11 : Si E de dimension n muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Alors : une partie A de E est compacte ssi elle est fermée bornée.
- Exemple : $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont compacts.

III. Fonctions continues sur un compact de $\mathbb{R}^n$:

. Soit
- Pro
- Prop
- Th
IV.
- T
- Thé

sur une telle partie. Exemples et applications.

. Soient $(E;\|\cdot\|_E)$ et $(F;\|\cdot\|_F)$ 2 $\mathbb{R}$-e.v.n.

- Prop 12 : Soit $f : E \to F$ une application continue. Si A partie compacte de E alors $f(A)$ partie compacte de F.

- Prop 13 : Si E compact et $f : E \to \mathbb{R}$ continue alors f est bornée et atteint ses bornes.

- Théo 14 : de Heine

Si E compact et $f : E \to F$ est continue alors f est uniformément continue sur E.

IV. Application :

- Théo 15 : de Rolle

Soit $f \in \mathcal{C}([a;b];\mathbb{R})$ où a et $b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.
Si f est dérivable sur $]a;b[$ et $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a;b[$ tq $f'(c) = 0$

- Théo 16 : équivalence des normes en dimension finie

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes

- Théo 17 : de D'Alembert-Gauss

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

- Théo 18 : de Riesz

Si $(E;\|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.n. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), alors E est de dimension finie ssi la boule unité $\mathcal{B}(0;1)$ de E est compacte.

- Théo 19 : du pt fixe pour un e.v.n. compact

Si $(E;\|\cdot\|)$ e.v.n. compact et $f : E \to E$ tq : $\forall x,y \in E,\ x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x-y\|$

Alors f admet un unique pt fixe et
toute suite de la forme $\begin{cases} u_0 \in E \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
est convergente vers ce point fixe.

* Pré-requis :

- e.v.n., suite dans un e.v.n., valeur d'adhérence, continuité et uniforme continuité, dérivabilité, polynôme, racines

* Livre : 66 leçons Dantzer.

Leçon 224 : E.V.N. de dimension finie, normes usuelles, équiva...
Développement : (6) Le théorème de Riesz (ou caractérisation des ...

I. Normes sur un e.v. :

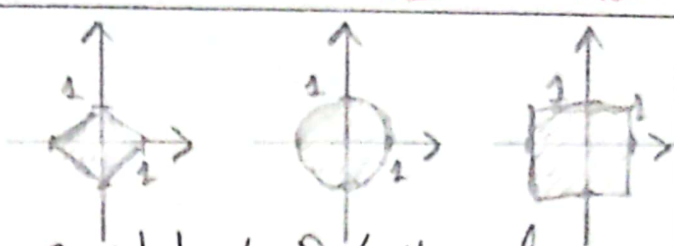
Déf 1 : Soit $(E;+;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v.
On appelle **norme** sur E toute application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ tq :
i) $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
iii) $\forall x, y \in E, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
Un $\mathbb{K}$-e.v. muni d'une norme est appelé $\mathbb{K}$-e.v. normé

ORAL : semi-norme

Rem : • $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$
• $\forall x, y \in E, \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|$

Exb : V.a. sur $(\mathbb{R};+;\cdot)$
module sur $(\mathbb{C};+;\cdot)$

Prop 2 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $(E_1;\|\cdot\|_{E_1}), \dots, (E_p;\|\cdot\|_{E_p})$ p $\mathbb{K}$-e.v.n.
$\forall (x_1;\dots;x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ on pose :
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|_{E_i}$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \|x_i\|_{E_i}^2}$$
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq p} \|x_i\|_{E_i}$$
$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur le $\mathbb{K}$-e.v. produit $(E_1 \times \dots \times E_p;+;\cdot)$



Représentation de $B_f(0;1)$ pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_3$.

Prop 3 : Si $(E;+;\cdot)$ est un e.v.n. de norme $\|\cdot\|$, alors l'application : $E \times E \to \mathbb{R}^+$, $(x;y) \mapsto \|x-y\|$ est une distance sur E.
ORAL : toutes les distances ne viennent pas d'une norme (ex : distance discrète)

Prop 4 : Une partie A non vide de $(E;\|\cdot\|)$, e.v.n., est **bornée** ssi $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tq : $\forall x \in A, \|x\| \leq M$.

II. Normes équivalentes :

Déf 5 : Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur un même e.v. E sont dites **équivalentes** s'il existe 2 réels k et k' de $\mathbb{R}^{+*}$ tq :
$$\forall x \in E, \ k\|x\|' \leq \|x\| \leq k'\|x\|'$$

Théo 6 : Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies sur le $\mathbb{K}$-e.v. $(E_1 \times \dots \times E_p;+;\cdot)$ sont équivalentes.

III. En dimension finie :

Théo 7 : Toutes les normes définies sur un même e.v. de dimension

…, équivalence des normes. Applications.
(… dération des fctions continues)

finie sont équivalentes.

- **Théo 8 :** les parties compactes d'un e.v.n. de dim. finie sont les parties fermées bornées.

- **Cor 9 :** Tout e.v.n. de dimension finie est complet.

IV. Applications linéaires

Soient $(E; \|\cdot\|_E)$ et $(F; \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n. On note $\mathcal{L}(E;F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

- **Théo 10 :** Soit $f \in \mathcal{L}(E;F)$. On a équivalence entre :
  1) f est lipschitzienne sur E
  2) f est uniformément continue sur E
  3) f est continue sur E
  4) f est continue en 0
  5) f est bornée sur la boule unité fermée de E
  6) f est bornée sur la sphère unité de E
  7) $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq M.\|x\|_E$

- **Exemple.** On considère dans $\mathbb{R}[X]$: $\|P\| = \sup_{x\in[0;1]} |P(x)|$
  l'application $\varphi : P \to P'(0)$ est linéaire mais non continue

- **Prop 11 :** Si $(E; \|\cdot\|_E)$ est un e.v.n. de dimension finie et $(F; \|\cdot\|_F)$ est un e.v.n., alors toute fonction f de $\mathcal{L}(E;F)$ est continue.

V. Le théorème de Riesz :

- **Prop 12 :** Soit $(E; \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n. Alors E est de dimension finie ssi la boule unité de E $\overline{B}(0,1)$ est compacte.

- **Exemple** $(\mathcal{C}([0;2\pi]; \mathbb{C}); +; \cdot)$ $\mathbb{C}$-e.v. normé par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;2\pi]} |f(x)|$ est de dimension infinie.

* Prérequis : - e.v., application linéaire, application continue, distance, compacité, complétude

* Livre : 66 leçons
Dantzer
20 démonstrations

Leçon 225 : Application linéaires continues, normes associ…
Développement : (1) Caractérisation app. linéaires continues (2…

$(E; \|\cdot\|_E)$, $(F; \|\cdot\|_F)$ et $(G; \|\cdot\|_G)$ $\mathbb{K}$-e.v.n. où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Caractérisation des applications linéaires continues et normes :

– **Thé 1** : Soit $f \in \mathcal{L}(E;F)$. On a équivalence entre :

1/ f lipschitzienne sur E
2/ f uniformément continue sur E
3/ f continue sur E
4/ f continue en 0
5/ f bornée sur la boule unité fermée de E
6/ f bornée sur la sphère unité de E
7/ $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$

– **Exemple** :

1/ Sur $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\|P\| = \sup_{x \in [0;1]} |P(x)|$
l'application $\varphi : P \to P'(0)$ est linéaire et non continue

2/ $\varphi : (\mathcal{C}([a;b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$
$f \longmapsto \int_a^b f(t) \sin t \, dt$
est linéaire et continue

– **Prop 2** : Equivalence des normes
Soient N et N' deux normes définies sur E, $\mathbb{K}$-e.v. Alors on a équivalence entre :
1/ N et N' équivalentes
2/ $Id_E : (E; N) \to (E; N')$ bicontinue
3/ une suite de E converge vers x pour N ssi elle converge vers x pour N'
4/ une partie de E est fermée (resp bornée) pour N ssi elle est fermée (resp. bornée) pour N'

II. L'espace vectoriel $\mathcal{L}_c(E;F)$:

On note $\mathcal{L}_c(E;F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E vers F.

– **Prop 3** : $*$ Si $f \in \mathcal{L}_c(E;F)$ on a :
$$\sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} < +\infty$$

$*$ $\mathcal{L}_c(E;F)$ est un e.v. et l'application $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_c}$ définie sur cet e.v. par : $\forall f \in \mathcal{L}_c(E;F)$: $\|f\|_{\mathcal{L}_c} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$
est une norme appelée norme subordonnée aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

– **Cor 4** : $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq \|f\|_{\mathcal{L}_c} \cdot \|x\|_E$

– **Cor 5** : Dans $\mathcal{L}_c(E;E)$, la norme subordonnée $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_c}$ est une norme d'algèbre.

– Pro…
de…
e…
– Pr…
s…
u…
III…
① au… at…
②
IV…
– Prop…
– Pro…
– Pro…

associées. Exemples.

(12) Normes subordonnées

- Prop 6 : Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach, alors $(\mathcal{L}_c(E;F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}_c})$ est un espace de Banach.

- Prop 7 :
si $u \in \mathcal{L}_c(E;F)$, $v \in \mathcal{L}_c(F;G)$ alors $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E;F)$ et $\|v \circ u\| \leq \|u\| \|v\|$

III. Exemples de normes subordonnées

① Si u est un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E, alors $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle|$
$= \max\{|\lambda| / \lambda \in Sp(u)\}$
$= r(u)$ (rayon spectral)

② Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sa matrice dans la base canonique. La norme subordonnée à N_∞ est définie par $\|f\| = \max_{1 \leq i \leq m} \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \right)$

IV. Cas des formes linéaires et bilinéaires

- Prop 8 : Le noyau H d'une forme linéaire φ sur E est fermé ou dense dans E

- Prop 9 : Une forme linéaire sur E est continue ssi son noyau est fermé.

- Prop 10 : Soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Alors B est continue ssi $\exists K \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall (x;y) \in E \times F$ on a $\|B(x;y)\|_G \leq K \|x\|_E \|y\|_F$

V. En dimension finie

- Prop 11 : Toute application linéaire d'un e.v.n. de dim finie dans un espace vectoriel réel F de dim. quelconque est continue.

VI. Prolongement d'une application linéaire continue :

- Prop 12 : Si E_1 est un sous-espace dense de E et si F est de Banach, alors toute application linéaire définie sur E_1 à valeur dans F se prolonge de manière unique sur E en une application linéaire continue de même norme.

* Prérequis : applic. continue, uniformément continue, lipschitzienne, linéaire, e.v.n., normes, parties fermées, boules, équivalents, adhérence et partie dense,

X livres : 66 leçons, Dantzer, Oral en poche.

* Compléments leçon 225 : Application linéaire continue, normes associés. Exemples.

- Exemple 1 :

① φ est linéaire

Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n : \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = (1-x)^n$

On a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \|P_n\| = \sup_{x \in [0,1]} |P_n(x)| = 1, \text{ donc } P_n \in S(0,1)$$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(P_n) = P_n'(0) = -n$

donc φ n'est pas bornée sur la sphère unité

donc φ est linéaire mais non continue

② $\varphi : (\mathcal{C}([a;b], \mathbb{K}) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$
$$f \longmapsto \int_a^b f(t)\sin(t)\,dt$$

est bien définie car $t \mapsto f(t)\sin(t)$ est continue sur le compact $[a;b]$

φ est linéaire et :
$$|\varphi(f)| \leq \|f\|_\infty \underbrace{\left(\int_a^b |\sin(t)|\,dt\right)}_{K}$$

donc φ est continue, et linéaire

- Prop 2 : Equivalence des normes

* si N et N' équivalentes : $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\forall x \in E, k_1 N(x) \leq N'(x) \leq k_2 N(x)$

d'où $id_E : (E;N) \to (E;N')$

et $id_E : (E;N') \to (E;N)$ sont continue (théo. de caractérisation)

donc $id_E : (E;N) \to (E;N')$ est bicontinue

* si $id_E : (E;N) \to (E;N')$ est bicontinue alors :

$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ tq $N'(x) \leq k_2 N(x)$ $\forall x \in E$
$N(x) \leq k_1 N(x)$

$k_1 \neq 0$ car sinon $E = \{0_E\}$

et donc : $\frac{1}{k_1} N(x) \leq N'(x) \leq k_2 N(x)$ et N et N' sont équivalents

* si N et N' équivalents, si $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N, N(x_n - x) \leq \varepsilon$
$\Rightarrow k_1 N'(x_n - x) \leq \varepsilon$
$\Rightarrow N'(x_n - x) \leq \frac{\varepsilon}{k_1}$ etc.

* Pour fermé et borné on utilise le théorème de caractérisation etc.

- Prop 7 : Si $u \in \mathcal{L}_c(E;F)$ et $v \in \mathcal{L}_c(F;G)$ alors il est clair que $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E;G)$

On a :
$$\forall x \in E, \text{ mais } \|(v \circ u)(x)\|_G \leq \|v\|_{\mathcal{L}_c} \|u(x)\|_F$$
$$\leq \|v\|_{\mathcal{L}_c} \|u\|_{\mathcal{L}_c} \|x\|_E$$

et donc $\|v \circ u\| \leq \|u\|_{\mathcal{L}} \|v\|_{\mathcal{L}}$.

* Exemple de normes subordonnées :

① Par le théorème spectral, il existe une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ orthonormée diagonalisante.
Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ses valeurs propres tq : $\lambda_1\leq\dots\leq\lambda_n$
On a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Soit $x=x_1e_1+\dots+x_ne_n$ un élément de E de norme 1
Alors

$$\begin{aligned}\|u(x)\|^2&=\lambda_1^2x_1^2+\dots+\lambda_n^2x_n^2\\ &\leq\lambda_n^2(x_1^2+\dots+x_n^2)\\ &\leq\lambda_n^2\end{aligned}$$

donc : $\|u(x)\|\leq\lambda_n=\rho(u)$

Maintenant : $\|u(e_n)\|=\|\lambda_ne_n\|=|\lambda_n|=\rho(u)$

donc $\|u\|_{\mathcal{L}_c}=\sup\limits_{\|x\|=1}\|u(x)\|=\rho(u)$

Si $x=x_1e_1+\dots+x_ne_n$ de norme 1 :

$$\begin{aligned}\langle u(x),x\rangle&=\langle x_1u(e_1)+\dots+x_nu(e_n);x_1e_1+\dots+x_ne_n\rangle\\ &=\langle x_1\lambda_1e_1+\dots+x_n\lambda_ne_n;x_1e_1+\dots+x_ne_n\rangle\\ &=x_1^2\lambda_1+\dots+x_n^2\lambda_n\\ &\leq\lambda_n\end{aligned}$$

etc.

② Si $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=AX$, alors :

* $\forall k\in[\![1,m]\!]$ on a : $|y_k|=\left|\sum\limits_{l=1}^{n}a_{kl}x_l\right|\leq\sum\limits_{l=1}^{n}|a_{k,l}||x_l|$

$$\leq\left(\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}|\right)\|X\|_\infty$$

d'où $\mathrm{Max}\{|y_1|,\dots,|y_m|\}\leq\left(\sum\limits_{l=1}^{n}|a_{kl}|\right)\|X\|_\infty$

i.e. $\|Y\|_\infty\leq\underbrace{\left(\sum\limits_{l=1}^{n}|a_{kl}|\right)}_{K}\|X\|_\infty$

par le théorème de caractérisation des application linéaire continue, f est donc continue.

* On sait que $\|f\|_{\mathcal{L}_c}\leq K$. On va mq $\|f\|_{\mathcal{L}_c}=K$.
Soit $k_0\in[\![1,m]\!]$ tq $\mathrm{Max}_{k\in[\![1,m]\!]}\left\{\sum\limits_{l=1}^{n}|a_{kl}|\right\}=\sum\limits_{l=1}^{n}|a_{k_0l}|$
$\forall l\in[\![1,n]\!]$, $\exists\,\sigma_l\in\mathbb{U}$ tel que : $|a_{k_0l}|=a_{k_0l}\sigma_l$

Soit $X=\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$. On a : $\|X\|_\infty = 1$ et :

$$\begin{aligned}\|AX\|_\infty &= \operatorname{Max}\{|y_1|,\dots,|y_m|\} \\ &= |y_{k_0}| \\ &= \left|\sum_{\ell=1}^{m} a_{k_0\ell} v_\ell\right| \\ &= \sum_{\ell=1}^{m} |a_{k_0\ell}| = K\end{aligned}$$

d'où $\|f\|_{\mathcal{L}_c} = \underset{k\in[\![1;m]\!]}{\operatorname{Max}} \left\{ \sum_{\ell=1}^{m} |a_{k\ell}| \right\}$

- Prop 6 : $(\mathcal{L}_c(E;F);\|\cdot\|_{\mathcal{L}_c})$ est un espace de Banach
- Preuve : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{L}_c(E;F);\|\cdot\|_{\mathcal{L}_c})$ alors :
  $\forall x\in E, \forall n\in\mathbb{N}, \forall p\in\mathbb{N} : \|f_n(x)-f_p(x)\|_F \le \|x\|_E \|f_n-f_p\|_{\mathcal{L}_c}$
  Comme $(f_n)_n$ de Cauchy, on en déduit que $\forall x\in E$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet F, donc convergente.
  On peut donc définir $f : E \to F$, $x \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$

- Mq f est une application linéaire continue :
  $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}, \forall x,y\in E$ on a : $\lambda f(x)+\mu(f(y)) = \lambda \lim\limits_{n} \dots$
  donc f est linéaire

  La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc elle est bornée.
  Soit alors M réel tq : $\forall n\in\mathbb{N}, \|f_n\|_{\mathcal{L}_c} \le M$

  Soit $x\in S(0;1)$. Comme la norme est continue, on a :
  $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n(x)\|_F = \|f(x)\|_F$
  donc, on en déduit : $\|f(x)\|_F \le M$
  donc f est bornée sur la sphère unité, donc f est continue
  D'où $f\in\mathcal{L}_c(E;F)$
- Mq f est limite dans $(\mathcal{L}_c(E;F);\|\cdot\|_{\mathcal{L}_c})$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
  Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tq : $\forall n\ge n_0, \forall p\ge n_0, \|f_n-f_p\|_{\mathcal{L}_c} \le \varepsilon$
  Si $x\in S(0;1)$ alors : $\forall n\ge n_0, \forall p\ge n_0\ \|f_n(x)-f_p(x)\|_F \le \varepsilon$

Fixons n, alors : $\lim_{p\to+\infty} \|f_n(x)-f_p(x)\|_F = \|f_n(x)-f(x)\|_F$

Comme cette suite est majorée à partir d'un certain rang par ε, à la limite on a : $\|f_n(x)-f(x)\|_F \leq \varepsilon$

et donc : $\forall n \geq n_0, \ \sup_{x\in S} \|f_n(x)-f(x)\|_F \leq \varepsilon$

i.e. $\forall n \geq n_0, \ \|f_n - f\|_{\mathcal{L}_c} \leq \varepsilon$

d'où la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f et $(\mathcal{L}(E,F); \|\cdot\|_{\mathcal{L}_c})$ est complet

- Prop 8 : $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est fermé ou dense dans E

- Preuve : $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$

$\overline{H}$ est un s.e.v. fermé de E, contenant H

donc soit : H est fermé et $\overline{H} = H$

$\overline{H} = E$

- Prop 9 : Une forme linéaire est continue ssi son noyau est fermé

- Preuve $\Rightarrow$: Si φ est continue, alors $H = \mathrm{Ker}\,\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$

donc H image réciproque d'un fermé par une application continue

donc H fermé

$\Leftarrow$: Si $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$ est fermé

- si $\varphi = 0$: φ continue

- si $\varphi \neq 0$: $\exists\, e \in E\setminus\{0\}$ tq $\varphi(e) = 1$ et $e \in \underbrace{E\setminus H}_{\text{ouvert}}$

donc $\exists\, r \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\mathcal{B}_f(e;r) \subset E\setminus H$

en posant $H_1 = -e + H \Longrightarrow \mathcal{B}_f(0;r) \subset E \setminus H_1$

Si $\exists\, h \in \mathcal{B}_f(0;r)$ tq $|\varphi(h)| \geq 1$ alors $y = \dfrac{h}{\varphi(h)} \in \mathcal{B}_f(0;r)$

et $\varphi(y) = \dfrac{\varphi(h)}{\varphi(h)} = 1$, ce qui contredit $\mathcal{B}_f(0;r) \cap H_1 = \emptyset$

car $\varphi(y) = 1 = \varphi(e) \Rightarrow \varphi(y-e) = 0$

$\Rightarrow y \in H_1$

donc l'image de la boule fermée $\mathcal{B}_f(0;r)$ par φ est bornée par 1

et donc φ est continue

- Prop 10 : Forme bilinéaire

- Preuve $\Rightarrow$: Si B est continue, alors B continue en $(0;0)$ et donc :

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0$ tq :

$\forall (x;y) \in E\times F : \left(\|(x;y)-(0;0)\|_{E\times F} \leq \eta\right) \Rightarrow \left(\|B(x;y) - B(0;0)\|_G \leq \varepsilon\right)$

donc pour $\varepsilon = 1$, $\exists\, \eta > 0$ tq $\forall (x;y) \in \left(\mathcal{B}_f((0,0);\eta)\right)^2$,

$B(x;y) \in \mathcal{B}_f(\mathcal{B}(0,0);1)$

donc $\forall x \in E^*, \forall y \in F^* : \left\| B\left(\frac{\eta}{\|x\|_E} x ; \frac{\eta}{\|y\|_F} y\right)\right\|_G \leq 1$

d'où $\|B(x;y)\|_G \leq \frac{1}{\eta^2} \|x\|_E \|y\|_F$

$\Leftarrow$: Si $\exists\, k \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x,y$ $\|B(x;y)\|_G \leq k\|x\|_E \|y\|_F$

alors soit $(x_n;y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $E\times F$ convergeant vers $(a;b)$

$\Rightarrow (x_n)_n \to a$ et $(y_n)_n \to b$

et $\forall n \in \mathbb{N} : \|B(x_n;y_n) - B(a;b)\|_G = \|B(x_n - a;y_n) + B(a;y_n - b)\|_G$

$\leq \|B(x-a;y_n)\|_G + \|B(a;y_n-b)\|_G$

$\leq k\|x-a\|_E \|y_n\|_G + k\|a\|_E \|y_n - b\|_F$

donc $(B(x_n;y_n))_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow B(a;b)$ et B est continue en $(a;b)$

- Prop 11 : En dimension finie

- Preuve : Toutes les normes sont équivalentes sur E (car de dim finie) donc la continuité de f est indépendante de la norme choisie.
On prend $(e_1;\dots;e_n)$ base de E et on prend la norme $\|\cdot\|_\infty$.
On munit F d'une norme $\|\cdot\|_F$.
On a :

$\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\right\|_F \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F$

donc $\forall x \in S$:

$\|f(x)\|_F \leq 1 . \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F$

et f linéaire et donc continue de norme inférieure ou égale à $\sum_{i=1}^{n}\|f(e_i)\|_F$

- Prop 12 : Prolongement d'une application linéaire continue :
Dans Dantzer

Leçon 226 : Suites dans un espace vectoriel normé
Développement : 6 le théorème de Riesz

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I. Suites convergentes :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-e.v. normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E

- Déf 1 : 1) On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente s'il existe $l \in E$ tq : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $\|x_n - l\| < \varepsilon$

2) On appelle suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ application strictement croissante

3) On dit que $l \in E$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

- Rem : une suite est dite divergente si elle n'est pas convergente.

- Ex : * $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente
 * 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Rem : la limite l d'une suite convergente est unique

- Prop 2 : Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers $l \in E$, alors toute suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

- Prop 3 : Si les deux suites extraites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite l, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

- Prop 4 : Caractérisation séquentielle de la limite
Si $f : E \to F$ est une application où F est un $\mathbb{K}$-e.v.n. et si $x \in E$, on a équivalence entre :
i) f continue en x
ii) $\forall$ suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers x la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$

II. Espaces complets

$(E, \|\cdot\|)$ e.v.n. et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'élts de E.

1) Suites de Cauchy :

- Déf 5 : 1) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall p, q \in \mathbb{N}$: $p, q \geq n_0 \Rightarrow \|x_p - x_q\| < \varepsilon$

2) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si : $\exists M \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M$

- Prop 5 : 1) Toute suite convergente est de Cauchy
2) Toute suite de Cauchy est bornée

- Prop 6 : Toute suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge vers celle-ci.

2) Espaces de Banach :

- Déf
de
E e
de

- Thé
et
qu
et
co

- Thé
$\|$

III. (
$(E$
1) $\mathcal{L}$
- Déf
el
ac
- Prop 1
pa
- Prop 1
E
- Prop 1
E co
- Prop 1

- Déf 7 : Si toute suite de Cauchy de E converge dans E alors on dit que E est complet et que c'est un espace de Banach.

- Théo 8 : Si E espace de Banach et $f : E \to E$ application contractante alors f admet un unique point fixe $x \in E$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\begin{cases} x_0 \in E \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$ converge vers x.

- Théo 9 : * $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^p$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est complet
  * Si X ensemble et E e.v. de Banach alors $(\mathcal{B}(X;E), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

III. Compacité :

$(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n.

1) Définition et propriétés :

- Déf 10 : On dit qu'une partie A de E est compacte si toute suite d'élts de A admet une valeur d'adhérence dans A

- Prop 11 : Toute partie fermée d'une partie compacte est compacte.

- Prop 12 : Tout produit de 2 compacts est compact.

- Prop 13 : Si E compact alors E complet.

- Prop 14 : Une partie compacte de E est fermée et bornée.

- Prop 15 : Si E est de dim. finie, alors A (partie de E) compacte ssi A fermée bornée.

2) Applications :

- Théo 16 : Riesz
  Soit $\mathcal{B}(0;1)$ la boule unité de E.
  Alors E de dim finie ssi $\mathcal{B}(0;1)$ compacte

- Théo 17 : Soit E $\mathbb{K}$-e.v.n. compact et $f : E \to E$ application tq :
  $\forall x, y \in E : x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x-y\|$
  Alors f admet un point fixe x et la suite $(x_n)_n$ définie par : $\begin{cases} x_0 \in E \\ x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est convergente vers x.

- Théo 18 : de Heine
  Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.n. et $f : E \to F$ application continue.
  Si E est compact alors f est uniformément continue sur E.

* livre 66 leçons (+ Dantzer pour compact et pt fixe)

* Prérequis : e.v.n. et norme, suites réelles et Bolzano Weierstrass, application continue, lipschitzienne, contractante, parties fermées et bornées d'un e.v.n.

Leçon 228 : Espérance, Variance, Applications
Développement : (2) Markov, Bienaymé Tchebychev, loi faible des gr

$\mathcal{E} = (\Omega ; \mathcal{A} ; \mathbb{P})$ espace probabilisé

I. Espérance d'une v.a. :

X : v.a. discrète définie sur $\mathcal{E}$
$X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$
Y : v.a. à densité f

– Déf 1 : On dit que X est d'espérance finie si la série $\sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)$ est absolument convergente.
L'espérance de X est :
$$E(X) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)$$

– Déf 2 : On dit que Y est d'espérance finie si l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$ est absolument convergente.
L'espérance de Y est :
$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$$

– Exemples : si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ $E(X) = np$
si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $E(X) = \lambda$
si Y suit une loi exponentielle de paramètre λ $E(Y) = \frac{1}{\lambda}$

II. Propriétés de l'espérance :

– Prop 3 : Si X est une v.a.r.d. et si $X(\Omega)$ possède un minimum m et un maximum M alors $E(X)$ existe et $m \leq E(X) \leq M$

– Théo 4 : Théorème de transferts :
• Si g est une fonction réelle définie sur $X(\Omega)$ alors $g \circ X$ est une v.a.r.d. notée $g(X)$ et on a (si convergence absolue) :
$$E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i) P(X = x_i)$$
• Si ϕ est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ alors $\phi \circ X$ est une v.a.r. à densité notée $\phi(X)$ et on a (si convergence absolue)
$$E(\phi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f(x) dx$$

– Exemple :

– Prop 5 :
1) L'ensemble des v.a.r. possédant une espérance finie est un e.v. sur lequel E est linéaire
2) si A et B sont deux v.a. indépendantes admettant des espérances finies alors $E(AB)$

... des grands nombres

existe et $E(AB) = E(A)E(B)$

III. Variance : X v.a.d. ou à densité

- Déf 6 : On appelle moment d'ordre 2 de X, s'il existe, $E(X^2)$

On appelle variance de X, si elle existe, l'espérance de la v.a. $(X-E(X))^2$:
$$V(X) = E((X-E(X))^2)$$

- Rem : $V(X) \geq 0$ et $V(X) = 0$ ssi X constante presque partout.

- Prop 7 : $V(X)$ existe ssi X admet un moment d'ordre 2

- Théorème 8 : de Koenig-Huygens :
Si X admet une variance alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

- Prop 9 : si $V(X)$ existe, alors $\forall a,b$ réels $aX+b$ admet une variance et $V(aX+b) = a^2V(X)$

- Exemple : si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

IV. Loi faible des grands nombres :

- Prop 10 : Inégalité de Markov
Si X v.a. à valeurs positives ou nulles ayant une espérance alors on a : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

- Prop 11 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Si X admet une variance, alors on a : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, P(|X-E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$

- Théo 12 : Loi faible des grands nombres
Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suite de v.a. définies sur $\mathcal{E}$ indépendantes d'espérance m et de variance σ^2, alors :
$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{} m$$
en probabilité

V. Fonction génératrice :

- Déf 13 : Soit X une v.a.n. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X la série entière :
$$g_X(t) = \sum_{n \geq 0} P(X=n)\, t^n$$

- Prop 14 : • La série a un rayon de convergence $R \geq 1$
• Si $E(X)$ existe et $R > 1$, alors g_X dérivable en 1 et $g'(X) = E(X)$
• Si $E(X^2)$ existe et $R > 1$ alors g_X deux fois dérivable en 1 et $g''(X) = E(X^2) - E(X)$

Livre : 66 leçons
- Dantzer
- Ordinateur poche
- 31 leçons
- Prérequis : Notion de proba, de v.a., convergence, séries entières, intégrale généralisée

Leçon 230 : Conditionnement et indépendance en probabilité
Développement : (10) Indicatrice d'Euler - Proba

I. Probabilité conditionnelle :

$\mathcal{E} = (\Omega ; \mathcal{A} ; P)$ espace probabilisé

- Déf 1 : Soit B un événement de $\mathcal{E}$ tq $P(B) > 0$. L'application
$P_B : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$
$A \mapsto P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
est une probabilité sur $(\Omega ; \mathcal{A})$ appelée probabilité conditionnelle sachant B.

- Rem : Si $P(B) \neq 0$, alors $\forall A \in \mathcal{A}$ on a :
$P(A \cap B) = P(A/B) P(B)$

- Prop 2 : Formule des probabilités enchaînées
$\forall (A_i)_{1 \leq i \leq n}$:
$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1 / A_2 \cap \ldots \cap A_n) \times P(A_2 / A_3 \ldots A_n) \ldots P(A_n)$

(ORAL : sous condition)

- Déf 3 : On appelle système complet d'événements toute famille d'évts $(A_i)_{i \in I}$ ($I \subset \mathbb{N}$ non vide) tq :
1) $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$
2) $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
3) $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$

- Théo 4 : Formule des probabilités totales
Si $(A_i)_{i \in I}$ est un syst. complet d'évts tq $\forall i \in I, P(A_i) \neq 0$, alors
$\forall A \in \mathcal{A}, P(A) = \sum_{i \in I} P_{A_i}(A) \times P(A_i)$

- Exemple : $\forall B \in \mathcal{A}$ tq $P(B) \neq 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$:
ORAL $P(A) = P_B(A) P(B) + P_{\overline{B}}(A) P(\overline{B})$

- Théo 5 : Formule de Bayes
Si A et B deux évts de probabilités non nulles, on a :
$P(B/A) = \frac{P(A/B) P(B)}{P(A)}$

- Exemple : Si $(A_i)_{i \in I}$ syst. complet d'évts, on a : $\forall i \in I$, $P(A_i / A) = \frac{P(A/A_i) P(A_i)}{\sum_{j \in I} P(A/A_j) P(A_j)}$
ORAL

II. Événements indépendants :

- Déf 6 : Soient A et B deux événements. A et B sont dits indépendants si $P(B) = 0$ ou $P_B(A) = P(A)$

- Prop 7 : Deux évts A et B sont indépendants ssi $P(A \cap B) = P(A) P(B)$
(ORAL : relation symétrique)

- Prop 8 : A et B indépendants ssi
$\overline{A}$ et B indépendants ssi
A et $\overline{B}$ indépendants ssi
$\overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants

juste $\overline{A}$ et B

...ités - Exemples.

- Déf 9 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_n$ n événements. On dit que les $A_1, \dots, A_n$ sont :

1) mutuellement indépendants si $\forall I \subset \mathbb{N}$, $I \neq \emptyset$ on a $P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$

2) indépendants 2 à 2 si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$, on a : $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$

3) indépendants dans leur ensemble si $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$

ORAL : indép. mutuelle $\Rightarrow$ ind. 2 à 2 et ind. ensemble

- Exemple d'application : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

III. Variables aléatoires indépendantes

- Déf 10 : Deux v.a.r. X et Y sont indépendantes si $\forall (B_1, B_2) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$ on a : $P((X \in B_1) \cap (Y \in B_2)) = P(X \in B_1) \cdot P(Y \in B_2)$

- Cas discret : X et Y indépendants ssi $\forall x_i \in X(\Omega)$ et $\forall y_j \in Y(\Omega)$ on a : $P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i) P(Y = y_j)$

- Cas continu :

- Théo 11 : Si X de densité f et Y de densité f' sont indépendants alors (X, Y) a pour densité $g = f' f$

ORAL

- Déf 12 : Soient $X_1, \dots, X_n$ n v.a.r. ($n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$). Elles sont dites indépendantes si $\forall I \subset [\![1,n]\!]$ et $\forall$ famille de boréliens $(B_i)_{i \in I}$:
$$P\left(\bigcap_{i \in I} (X_i \in B_i)\right) = \prod_{i \in I} P(X_i \in B_i)$$
(*)

ORAL : indépendance $\Rightarrow$ indépendance 2 à 2

- Exemples : * Si $X_1, \dots, X_n$ n v.a.r. indépendantes t.q. $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$

IV. Covariance :

- Prop 13 : Si X et Y v.a. indépendants admettant une espérance, alors XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$

- Déf 14 : Si X et Y v.a. admettant une variance. On appelle covariance de X et Y : $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

- Prop 15 : Si $X_1, \dots, X_n$ n v.a. admettant une variance, alors :
$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} Cov(X_i, X_j)$$

- Cor 16 : Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendants 2 à 2 alors $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

(*) Si $X_1, \dots, X_n$ indépendantes, toutes fonctions de $X_1, \dots, X_p$ est indépendante de $X_{p+1}, \dots, X_n$

- Prérequis : Probabilité, V.A., Espérance, Variance

- Livres : 66 leçons et Proba et Stats

Leçon 23.1 : Suite de v.a. indépendantes de même loi. V.a. de
Développement : (1) Théorème de Weierstrass

$(\Omega; \mathcal{A}; P)$ espace probabilisé

I. Loi de Bernoulli :

- Déf 1 : Une v.a. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in [0;1]$) si $X(\Omega) = \{0;1\}$, $P(X=0) = 1-p$ et $P(X=1) = p$. On note $X \sim \mathcal{B}(p)$

- Rem : X est l'indicatrice du succès d'une expérience aléatoire (Pile ou Face par exemple)

- Prop 2 : Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors X admet une variance (et donc une espérance) et on a :
$E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$

II. Loi binomiale :

- Déf 3 : Une v.a. X suit une loi binomiale de paramètres n et p (où $n \in [\![0;n]\!]$ et $p \in [0;1]$) si $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et $\forall k \in [\![0;n]\!]$ on a :
$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
On note : $X \sim \mathcal{B}(n;p)$

- Prop 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et une suite $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ de n événements indépendants définis sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ possédant la même probabilité $p \in [0;1]$ de réalisation. Alors la v.a. S dénombrant les événements A_i réalisés suit une loi $\mathcal{B}(n;p)$.

- Exemple : La v.a. S dénombrant le nombre de piles obtenus à pile ou face lors de n lancers est $\mathcal{B}(n;p)$

- Prop 4 : Si $X \sim \mathcal{B}(n;p)$ alors X admet une variance et on a :
$E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

- Prop 5 : Si $X_1, \dots, X_n$ v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$, alors
$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n;p)$

- Prop 6 : Si $X_1, \dots, X_m$ v.a. indépendantes et si $X_i \sim \mathcal{B}(n_i;p)$

...e loi binomiale et approximation de la loi binomiale.

$\forall i \in [\![1;n]\!]$ alors :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{n} n_i ; p\right)$$

III. Approximations :

1) Théorème de Bernoulli :

- Théo 6 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Soit $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la v.a. constante p.

2) Convergence de la binomiale vers la loi de Poisson :

- Prop 7 : Si $(X_n)_n$ est une suite de v.a.r. discrètes tq $X_n \sim \mathcal{B}(n;p_n)$ avec $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, alors $(X_n)_n$ converge en loi vers $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

3) Théorème de Stone-Weierstrass :

- Théo 8 : Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est limite uniforme d'une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

4) Théorème de Moivre-Laplace :

- Théo 9 : Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. tq $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on ait $S_n \sim \mathcal{B}(n;p)$, $p \in]0;1[$. Alors $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| \leq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

Livres : * Oral en poche
* 66 leçons
(* Dantzer)

Prérequis : convergences, notion de probabilité (v.a, espérance, variance), loi de Poisson, loi normale

Leçon 232 : Variables aléatoires possédant une densité. Exemples.

Développement : *Aiguille de Buffon*
66 leçons + Probas & stats

I. Généralités :
Définition de la densité + fonction de répartition
Espérance d'une variable à densité + propriétés
Moments d'ordre n + propriété
Variance d'une variable à densité + propriétés
Formule de Koenig Huygens

II. Exemples de variables aléatoires possédant une densité :
1) Loi uniforme :
Définition + Fonction de répartition + E + V
2) Loi exponentielle :
Définition + Fonction de répartition + E + V
Propriété P(X>s + t/X>t) = P(X>s)
3) Loi normale centrée réduite :
Définition + Fonction de répartition + E + V
Définition loi normale de paramètres m et sigma + propriété pour se ramener à la loi normale centrée réduite + espérance et variance de cette loi

III. Cas de deux variables à densité :
1) Indépendance de deux variables à densité :
Théorème de la densité du couple (X ;Y) si X et Y indépendantes
2)Densité d'une somme de deux variables à densité :
Théorème du produit de convolution

IV. Inégalités :
1) Inégalité de Markov
2) Inégalité de Bienaymé Tchebychev

V. L'aiguille de Buffon :
Exercice + résolution